

高级算法设计与分析

计数问题

夏盟佶

Xia, Mingji

中科院软件所
计算机科学国家重点实验室

2016.6

#P

- $F : \Sigma^* \rightarrow \mathbf{N}$ (e.g. $\Sigma = \{0, 1\}$)

例

完美匹配数目问题 (*#PerfectMatching*)

输入: 图 G (的编码)

输出: G 的完美匹配数目

• 定义

$F \in \#P$

当且仅当存在多项式时间不确定型图灵机 M , 使得 $M(x)$ 的接受计算路径数目等于 $F(x)$,

当且仅当存在多项式时间算法 R , R 的两个输入 x 和 y 总满足 $|y| = |x|^k$, 使得 $F(x) = |\{y | R(x, y) = 1\}|$ 。

- NP里的判定问题问有没有证据 y , #P里的计数问题问有多少证据。
- 这个类由L. Valiant于1979年在文章 “The complexity of computing the permanent”, Theoretical Computer Science, 中首次提出。

#P难

- 定义

#P难问题:

如果#P里的所有问题都可以多项式时间图灵归约到 F ，那么 F 就是#P难问题。

- 如果一个问题为#P难的，那么也是NP难的。
- 一个二元函数 R 定义的计数问题是否是#P难的，和同一个 R 定义的判定问题是否是NP难的，这两种命题没有关系。
- Toda定理:

$$PH \subseteq P^{\#P}.$$

#P难问题

- #SAT, Permanent, 哈密尔顿回路数目问题,

Theorem

#SAT是#P难的。

- 证明类似cook定理。

Theorem

0, 1-Permanent是#P难的。

- 因为#SAT可以归约到Permanent, 并且归约有传递性。

Permanent: 偶图的带权完美匹配数目

- A 是 $n \times n$ 矩阵。

定义

$$\text{Permanent}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{j=1}^n A_{j, \pi(j)}$$

- A 有两种图表示: n 个点的有向图, 和 $2n$ 个点的偶图。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$
有向图 $G(V, E, W)$ 中, 有向边 (j, k) 的权重 $W(j, k) = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 G 的所有圈覆盖权重之和。
- $V = \{1, 2, \dots, n\}, U = \{1', 2', \dots, n'\}$ 。
无向偶图 $H(V, U, E, W)$ 中, 边 (j, k') 的权重 $W(j, k') = A_{j, k}$ 。
- $\text{Permanent}(A)$ 是 H 的所有完美匹配权重之和。

计数版本与判定版本

- #SAT是#P难的，其判定版本SAT是NP难的。
- 偶图的完美匹配数目问题是#P难的，其判定版本偶图是否存在完美匹配，是有多项式时间算法的。
用图的最大匹配算法即可。
- #2SAT是#P难的，其判定版本2SAT有多项式时间算法。

难和容易之间的问题

- 如果 P 不等于 NP ，存在 NP 中的问题，它不在 P 中，也不是 NP 难的。（非此即彼不成立）
- 证明是采用延迟对角线方法的构造性证明。
- 即一个人造的问题例子。

复杂性二分定理：一定范围内的问题要么难，要么容易

- 绝大多数研究过的 NP 中的问题，或者是 NP 难的，或者在 P 里。
- 一个问题集合中的问题要么是容易的（ P ），要么是难的（ NP 难），这种结果称为复杂性二分定理。
- 一种常见的问题集合，CSP（约束满足）问题。

Dichotomy theorem of CSP

\mathcal{F} is a set of relations in Boolean variables.

Theorem (Schaefer, STOC 1978)

Given a constraint set \mathcal{F} , the problem $CSP(\mathcal{F})$ is in P , if \mathcal{F} satisfies one of the conditions below, and $CSP(\mathcal{F})$ is otherwise NP -complete.

- \mathcal{F} is 0-valid (1-valid).
- \mathcal{F} is weakly positive (weakly negative). (*Horn SAT*)
- \mathcal{F} is affine. (*A system of linear equations*)
- \mathcal{F} is bijunctive. (*2SAT*)

#CSP问题类

每一个#CSP问题的实例（输入）和答案（输出）形式是一样的。

- 实例：
作用于变量集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的一些约束：
 $R_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,r_1}), \dots, R_m(x_{m,1}, \dots, x_{m,r_m})$
- 答案：

$$\sum_{X \in D^n} \prod_{j=1}^m R_j$$

（ D 表示一个变量的定义域。）

#CSP问题类

每一个#CSP问题的实例（输入）和答案（输出）形式是一样的。

- 实例：
作用于变量集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的一些约束：
 $R_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,r_1}), \dots, R_m(x_{m,1}, \dots, x_{m,r_m})$
- 答案：

$$\sum_{X \in D^n} \prod_{j=1}^m R_j$$

（ D 表示一个变量的定义域。）

#CSP问题类

每一个#CSP问题的实例（输入）和答案（输出）形式是一样的。

- 实例：

作用于变量集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的一些约束：

$$R_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,r_1}), \dots, R_m(x_{m,1}, \dots, x_{m,r_m})$$

- 答案：

$$\sum_{X \in D^n} \prod_{j=1}^m R_j$$

（ D 表示一个变量的定义域。）

给定一个函数集合 \mathcal{F} ，就定义了一个#CSP问题#CSP(\mathcal{F})，它的实例所用的约束 R 必须来自 \mathcal{F} 。

#CSP问题类

每一个#CSP问题的实例（输入）和答案（输出）形式是一样的。

- 实例：
作用于变量集合 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的一些约束：
 $R_1(x_{1,1}, \dots, x_{1,r_1}), \dots, R_m(x_{m,1}, \dots, x_{m,r_m})$
- 答案：

$$\sum_{X \in D^n} \prod_{j=1}^m R_j$$

（ D 表示一个变量的定义域。）

给定一个函数集合 \mathcal{F} ，就定义了一个#CSP问题#CSP(\mathcal{F})，它的实例所用的约束 R 必须来自 \mathcal{F} 。

#2SAT = #CSP($\{F \mid F(y, z) = y \vee z \text{ 或者 } \bar{y} \vee z \text{ 或者 } y \vee \bar{z} \text{ 或者 } \bar{y} \vee \bar{z}\}$)

#CSP的二分定理

布尔定义域的#CSP问题

- $\{0, 1\}$ 值域
只有一类问题有多项式时间算法，其他都是#P难的。
一类：仿射关系。
- 非负实数值域
两类：pure affine和product type
- 复数值域
两类： \mathcal{A} 和 \mathcal{P} (即product type)

第一易解类: \mathcal{A}

- $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。 $x_j \in D$ 。 $|D| = 2$ 。 (定义计数问题时, 定义域 D 无需结构。)
- 定义仿射关系函数: $\chi_{(AX=C)}$, 即 D 上 n 维空间的仿射子空间的指示函数。 (D 作为大小 2 的有限域。)
- $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个整系数多项式, $x_j \in \{0, 1\}$, 使用整数加法乘法运算。 $x_j^2 = x_j$ 。
- 要求 P 的最高次数是 2; 要求交错二次项的系数是偶数。
- 例如: $3x_1 + 2x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 。
- $F \in \mathcal{A}$, 当且仅当有形式 $\chi_{(AX=C)} \cdot i^{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}$ 。

#CSP(\mathcal{A})的算法

•

$$\sum_{x_j \in \{0,1\}, j=1, \dots, n} \chi_{(AX=C)} i^{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

- 假设 $AX = C$ 的自由变量是 x_1, \dots, x_r ,
解是 $x_{r+1} = L_{r+1}(X'), \dots, x_n = L_n(X')$ 。 $X' = \{x_1, \dots, x_r, 1\}$ 。
- 例如, 方程组是 $x_3 = x_1 + x_2 + 1 \pmod 2$ 。

•

$$\sum_{x_j \in \{0,1\}, j=1, \dots, r} i^{P(x_1, x_2, \dots, x_r, L_{r+1}(X'), \dots, L_n(X'))}$$

- P 采用整数运算, 作为 i 的指数, 可以模 4 运算。
- 下面把解表达式的模 2 运算融入模 4 运算。
 - 如果 P 里有一个一次项 x_3 , 换成 $L_3(X')^2$ 。(因为 $L^2 \pmod 4$ 等于 $L \pmod 2$ 。)
 - 如果有 $2x_3x_4$, 因为 $2x_3x_4 \pmod 4 = 2(x_3 \pmod 2)(x_4 \pmod 2)$, 代入 L_3, L_4 即可。

$$\sum_{x_j \in \{0,1\}} i^{P(x_1, x_2, \dots, x_r)}$$

- 无 x_1 项，或者 x_1 一次项系数是2。提取所有的 $2x_1$ 公因子。

$$\sum_{x_2, \dots, x_r} \sum_{x_1} i^{2x_1 L(X) + P'(x_2, \dots, x_r)} = \sum_{x_2, \dots, x_r} (i^{P'(x_2, \dots, x_r)} \sum_{x_1} (-1)^{x_1 L(X)})$$

$$\sum_{x_1} (-1)^{x_1 L(X)} = 2\chi_{(L(X)=0)}$$

- 有 x_1 项（系数是1或者3，以3为例）。提取 $2x_1$ ， x_1 的一次项不动。

$$= \sum_{x_2, \dots, x_r} (i^{P'(x_2, \dots, x_r)} \sum_{x_1} (-1)^{x_1 L(X)} i^{3x_1})$$

当 $L(X) = 0 \pmod{2}$ 时， $F(1, x_2, \dots, x_r) = -iF(0, x_2, \dots, x_r)$ ；

当 $L(X) = 1 \pmod{2}$ 时， $F(1, x_2, \dots, x_r) = iF(0, x_2, \dots, x_r)$ 。

$$\sum_{x_1} (-1)^{x_1 L(X)} i^{3x_1} = (1 - i)^{L^2(X)}$$

原本是关于 x_1, x_2, \dots, x_n 的 2^n 个赋值对 $\chi \cdot i^P$ 求和，已经看到了如何消除 χ 中的非自由变量和 i^P 中的一个变量，代价是函数表达式 $\chi \cdot i^P$ 的幅度受控的变化。

消除一个变量 x_i ，即从对两个大小 2^{n-1} 的超平面的点的函数值求和，转化成对其中一个超平面的点的函数值求和。

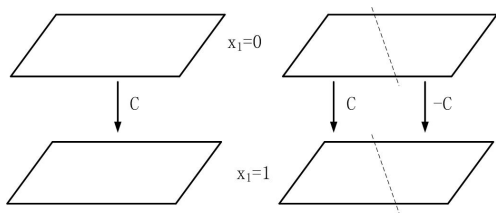


Figure: 虚线右侧区域表示仿射子空间 $L(X) = 1$

第一种情况， $C = 1$ 。第二种情况， $C = \pm i$ 。

A中的二元函数例子



$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

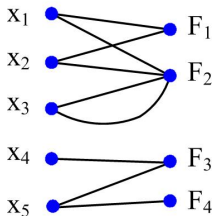
- #CSP(F)问题的一个实例，是一些 F 应用到变量 x_1, \dots, x_n 。
- 这个实例对应图 G , $V_G = \{x_1, \dots, x_n\}$, $(j, k) \in E_G$ 当且仅当实例中有约束 $F(x_j, x_k)$ 。
- 考虑被赋值1的顶点形成的子图 H 。如果 H 有奇（偶）数条边，所有约束的乘积是 -1 （ 1 ）。
- #CSP(F)(G)=图 G 的偶数条边的这种子图数目-奇数条边的子图数目。
- 图 G 的偶数条边的子图数目是多项式时间可以计算的。

第二易解类：product type

- 一个 n 元函数 F 在集合 \mathcal{E} ，当且仅当它在除某互补串对 α 和 $\bar{\alpha}$ 之外的输入上值都是0。

严格定义： $F \in \mathcal{E}$ 当且仅当存在 $\alpha \in \{0, 1\}^n$ ，
 $\forall X, X \notin \{\alpha, \bar{\alpha}\} \Rightarrow F(X) = 0$ 。

- 一个变量赋值若要对和 $\sum_{X \in D^n} \prod_{j=1}^m R_j$ 有非0贡献，它对 \mathcal{E} 中函数 F 的一个变量的赋值，决定了它对其他 F 的变量的唯一赋值。
- #CSP问题的实例可以画成偶图。



- 连通的 \mathcal{E} 函数乘在一起，还是 \mathcal{E} 函数。
- 一个函数是product type当且仅当能表示成 \mathcal{E} 中函数的乘积。

参考文献

- Nadia Creignou, Miki Hermann:
Complexity of Generalized Satisfiability Counting Problems. Inf. Comput. 125(1): 1-12 (1996)
- Martin E. Dyer, Leslie Ann Goldberg, Mark Jerrum:
The Complexity of Weighted Boolean CSP. SIAM J. Comput. 38(5): 1970-1986 (2009)
- Jin-Yi Cai, Pinyan Lu, Mingji Xia:
The complexity of complex weighted Boolean #CSP. J. Comput. Syst. Sci. 80(1): 217-236 (2014)
- 以上布尔定义域的#CSP问题复杂性，此外还有counting graph homomorphism, Holant等计数问题。
关于这些问题的复杂性二分定理综合综述，蔡进一和陈汐的书草稿。
- Complexity Classifications of Boolean Constraint Satisfaction Problems, 2001
Nadia Creignou, Sanjeev Khanna, Madhu Sudan
包含了早期的判定问题、计数问题和优化问题的复杂性二分